021989

3 4 3

ТУ–19–241–82

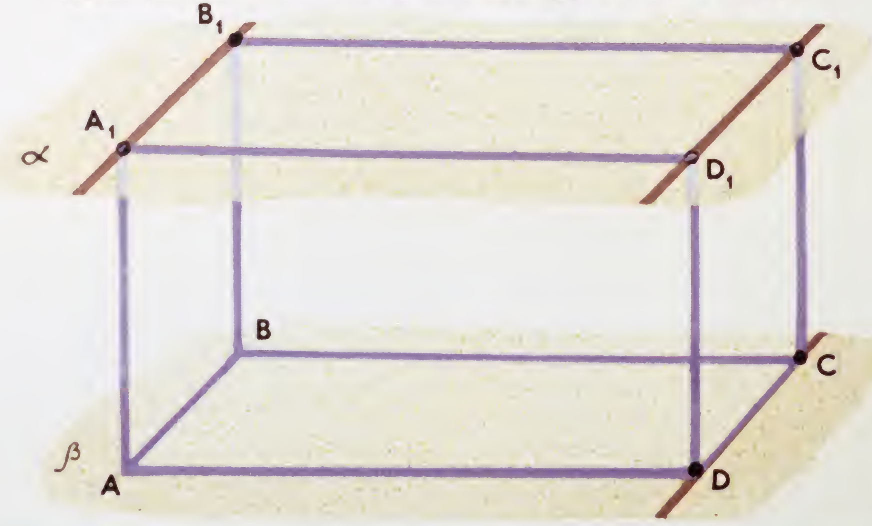
1

4

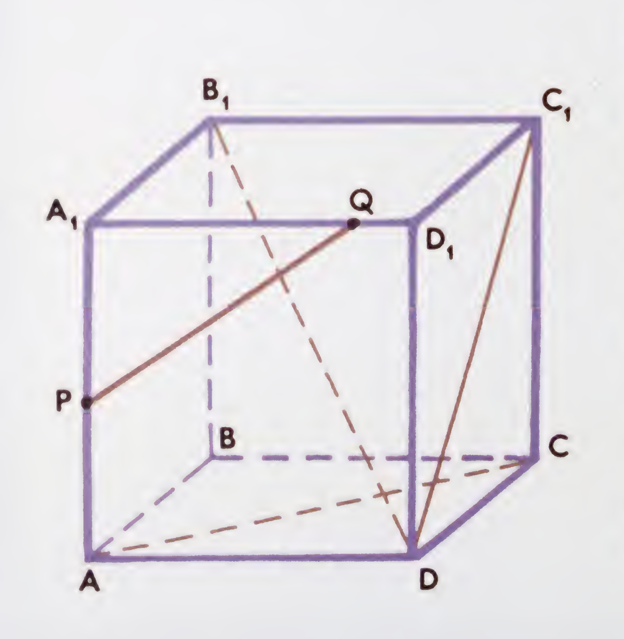

студия
ДИАФИЛЬМ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

Диафильм по математике для IX класса



Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.



Прямые AD и PQ пересекаются. Прямые AC и B_1D—скрещивающиеся. Являются ли параллельными, пересекающимися или скрещивающимися прямые

а) AB и CD;

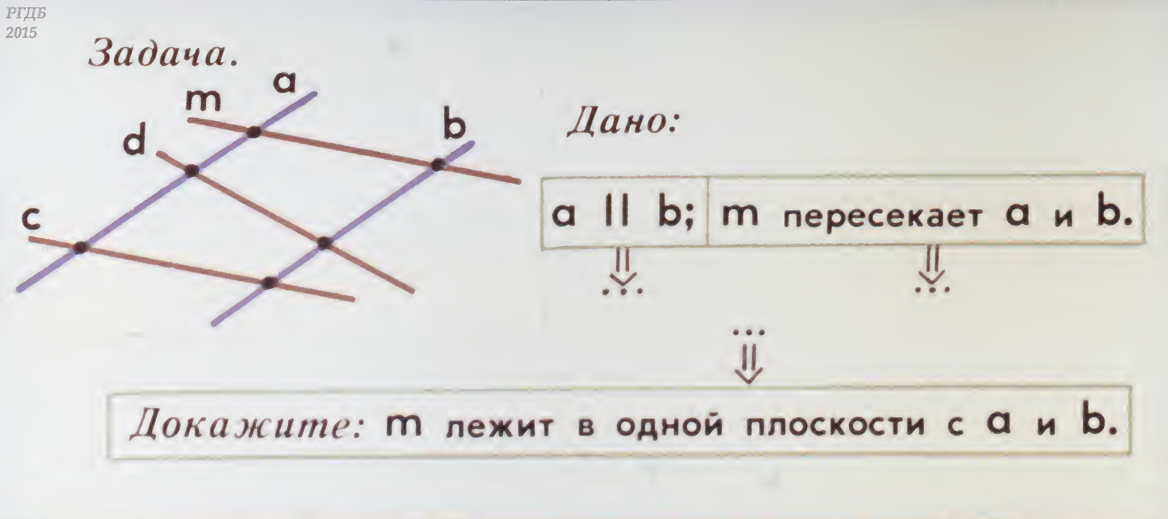
б) AB и C_1D_1;

в) CD и C_1D;

г) CD и AA_1;

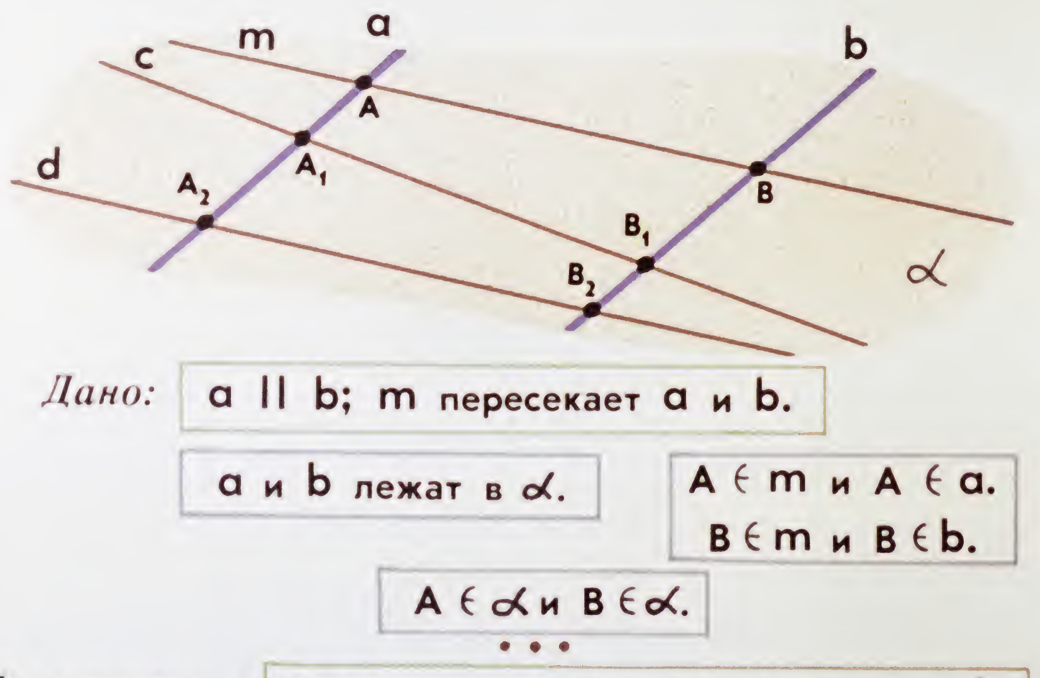
д) CD и A_1B_1;

е) PQ и A_1B_1?



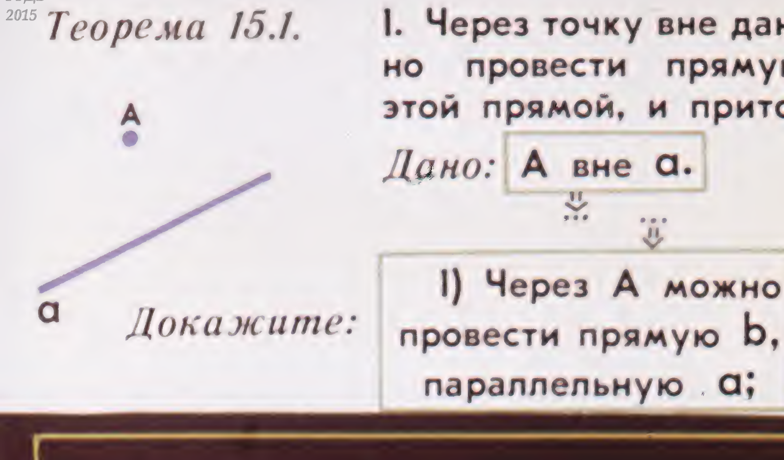
Установите, считая, что задача решена, каким может быть взаимное расположение прямых c и d, пересекающих прямые a и b?

Решение задачи.



Теорема 15.1.

1. Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.



Дано: A вне a.

Докажите:

1) Через A можно провести прямую b, параллельную a;

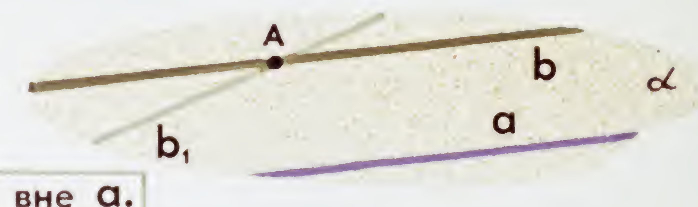
2) b—единственная.

Может ли прямая m быть параллельной ребру куба AB?

A
B
C
D
A_1
B_1
C_1
D_1
m

5

Доказательство теоремы 15.1.



Дано: A вне a.

Через A и a можно провести α.

В α через A проводим b ∥ a.

Предположим, через A проходит b_1 ∥ a.

Проведем через a и b_1 плоскость α_1.

• • •

Докажите:

1) Через A можно провести прямую b, параллельную a;

2) b – единственная.



Объясните, почему из рассматриваемой задачи следует справедливость утверждения: «Если прямые a и b пересекаются, то все прямые, параллельные прямой b и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости».

Решение задачи.

Дано:

a и b пересекаются; m ∥ b; m пересекает a в точке M.

Через a и b можно провести α.

Через M проходит единственная прямая, параллельная b.

Проведем в α через M прямую m′ ∥ b.

. . .

Докажите: m лежит в одной плоскости с a и b.

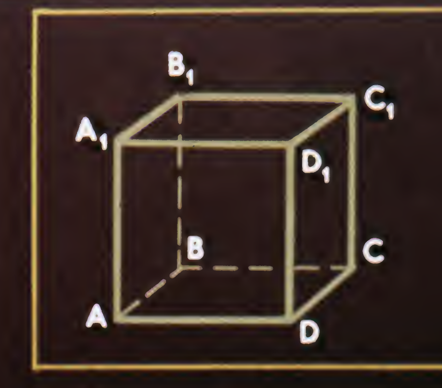
Теорема 15.2. **Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.**

Дано: $a \parallel c$, $b \parallel c$.

⇓ ... ⇓ ...

... ⇓

Докажите: $a \parallel b$.



Можно ли применить теорему к доказательству параллельности ребер куба BB_1 и DD_1?

Доказательство теоремы 15.2.

Дано: a || c, b || c.

a и c лежат в α и не пересекаются.	b и c лежат в β и не пересекаются.

Проведем γ через b и $A \in a$.
Пусть γ пересекает α по a_1.
Пусть a_1 пересекает β в B.

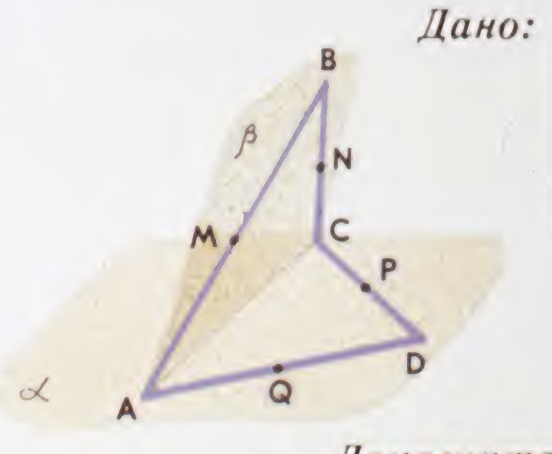
$B \in c$.	$B \in b$.
a_1 совпадает с a.	

. . .

a и b в γ и не пересекаются.

Докажите: a || b.

Задача.



Дано:

M, N, P, Q— середины сторон пространственного четырехугольника ABCD.



⇓

Докажите:

MNPQ— параллелограмм.

Воспользовавшись обозначениями чертежа, установите, чему равен периметр MNPQ, если AC = 9 см, BD = 10 см.

Решение задачи.

Дано:

M, N, P, Q—середины сторон пространственного четырехугольника ABCD.

Соединим A с C, B с D.

MQ, NP, MN, QP—средние линии треугольников ABD, CBD, ABC, ADC.
MQ ‖ BD; NP ‖ BD; MN ‖ AC; PQ ‖ AC;

• • •

MQ ‖ PN и MN ‖ PQ.

Докажите: MNPQ—параллелограмм.

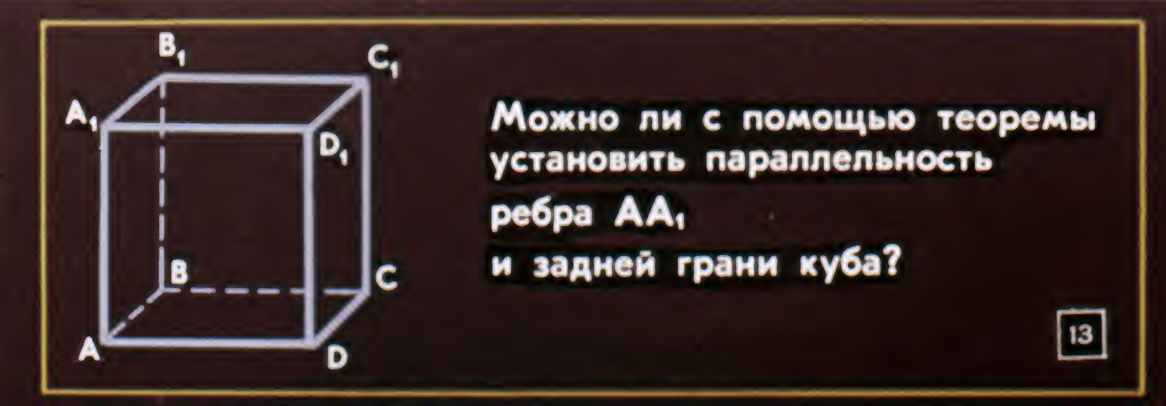
Прямая и плоскость называются параллельными, если они не пересекаются.

Теорема 15.3.

Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-либо прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Дано: b вне α; a лежит в α; b ∥ a.

Докажите: b ∥ α.



Доказательство теоремы 15.3.

Дано: b вне α. | a лежит в α. | b || a.

Можно провести β через b и a; b и a не пересекаются.

a — линия пересечения α и β.

Пусть b пересекает α в B,

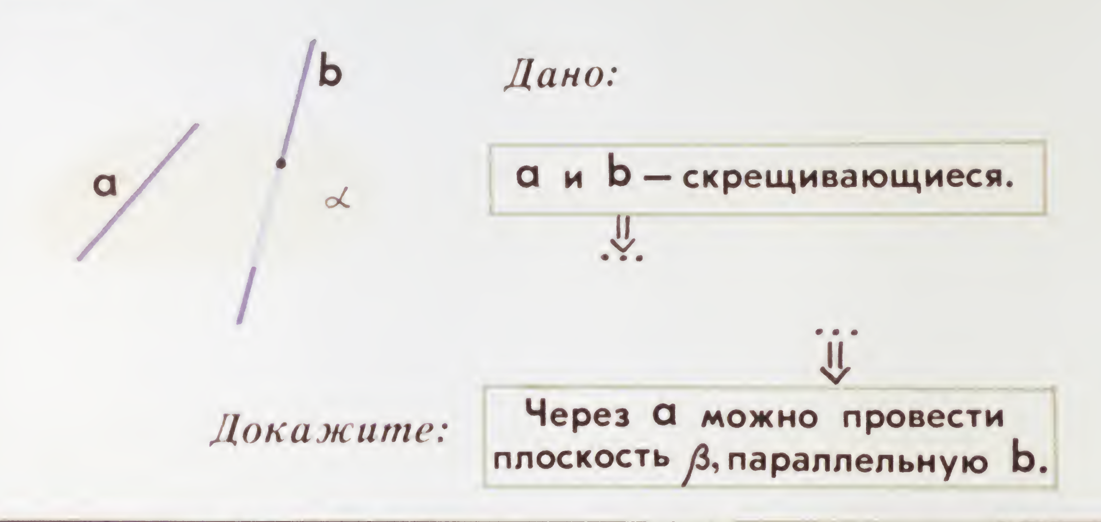
$B \in b$, $B \in \alpha$,

$B \in a$.

...

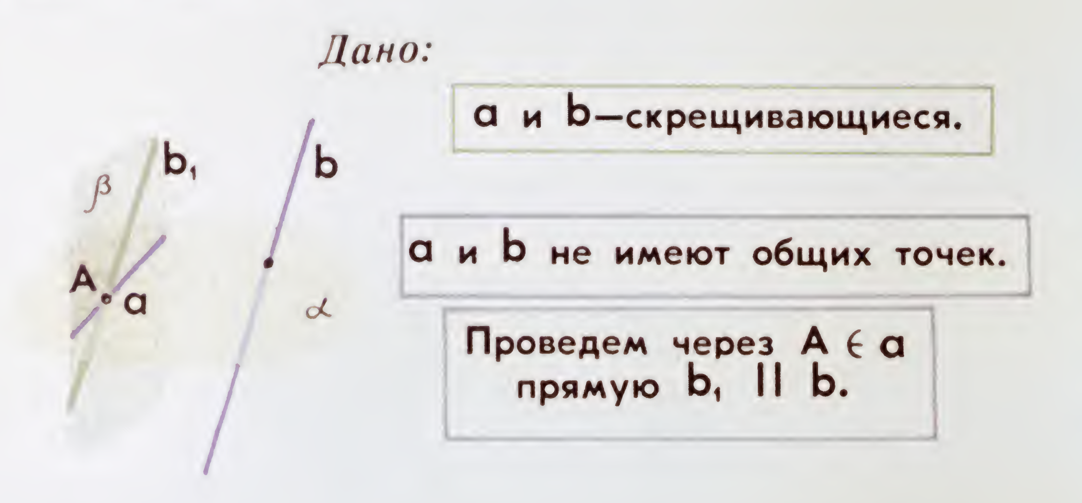
Докажите: b || α.

Задача.



В задаче говорится о скрещивающихся прямых. А можно ли провести через a плоскость, параллельную b, если 1) a и b пересекаются; 2) a и b параллельны?

Решение задачи.

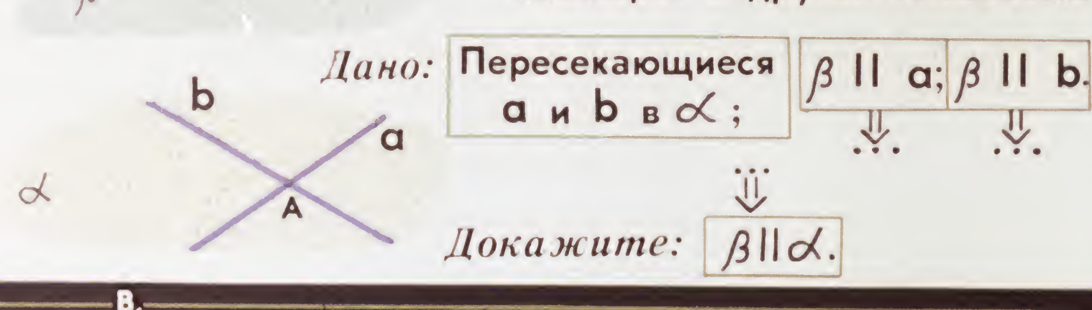


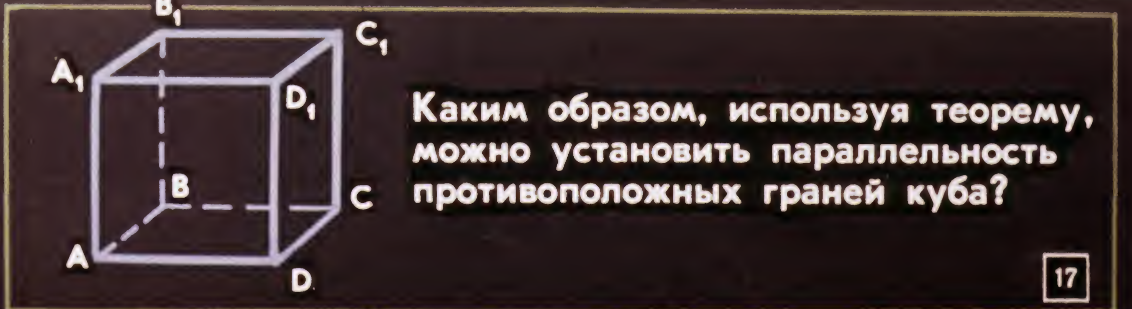
Докажите: Через a можно провести плоскость β, параллельную b.

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Теорема 15.4.

Две плоскости параллельны, если одна из них параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости.





Доказательство теоремы 15.4.

Дано: Пересекающиеся a и b в α; $\beta \parallel a$; $\beta \parallel b$.

a не пересекает β. b не пересекает β.

Предположим, α и β пересекаются по c; $a \parallel c$, $b \parallel c$.

...

α не пересекает β.

Докажите: $\alpha \parallel \beta$.

Задача.

Дано: a и b—скрещивающиеся.

⇓

...

...

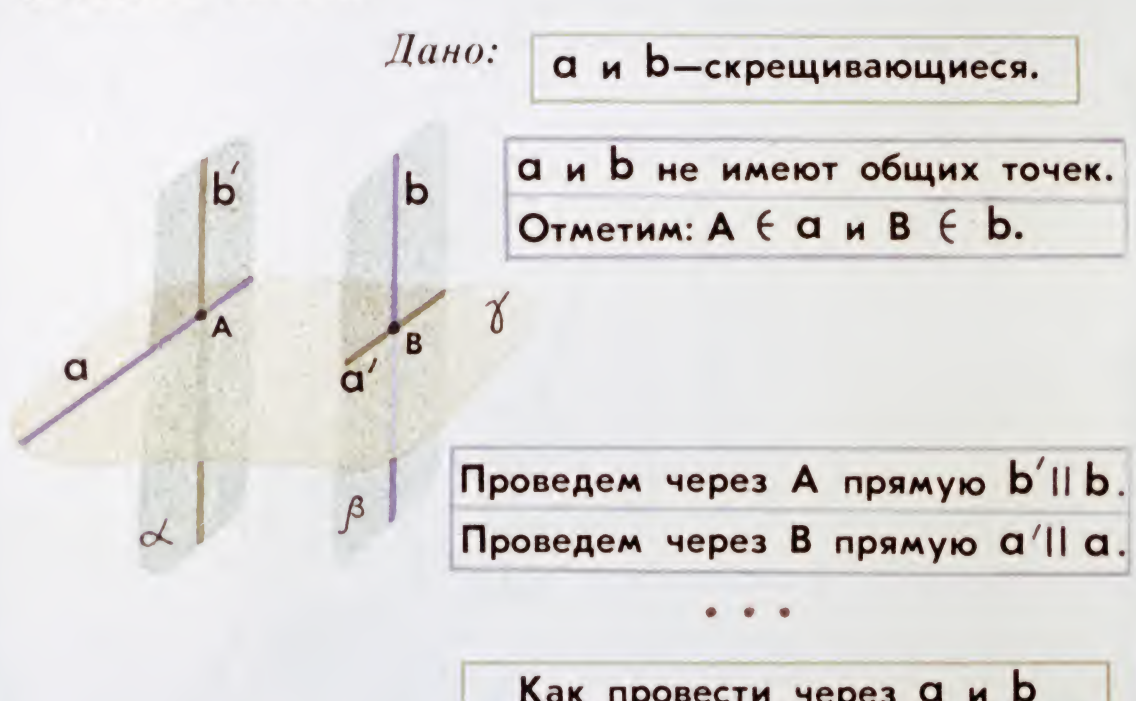
⇓

Как провести через a и b параллельные плоскости α и β?

Можно ли, считая, что задача решена, указать параллельные плоскости, которые проходят через ребра куба AD и C_1D_1? AD и BB_1?

Решение задачи.

Дано: a и b — скрещивающиеся.



a и b не имеют общих точек.

Отметим: A ∈ a и B ∈ b.

Проведем через A прямую b′ ∥ b.

Проведем через B прямую a′ ∥ a.

• • •

Как провести через a и b параллельные плоскости α и β?

Теорема 15.5. Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

A

α

Дано: A вне α.

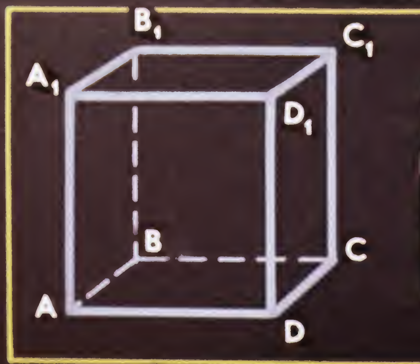
⇓

. . .

. . .

⇓

Докажите: 1) Через A можно провести $\beta \parallel \alpha$;
2) β — единственная.



Можно ли указать плоскость, проведенную через вершину D куба параллельно

а) верхней грани;

б) задней грани;

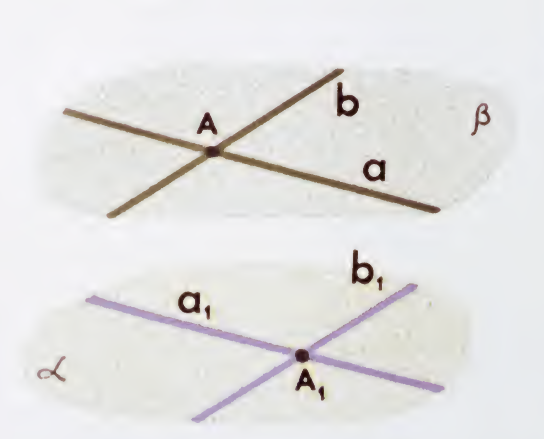
в) нижней грани?

Доказательство утверждения 1 теоремы 15.5.

Дано: A вне α.

Проведем в α пересекающиеся a_1 и b_1.

Через A проведем $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$.

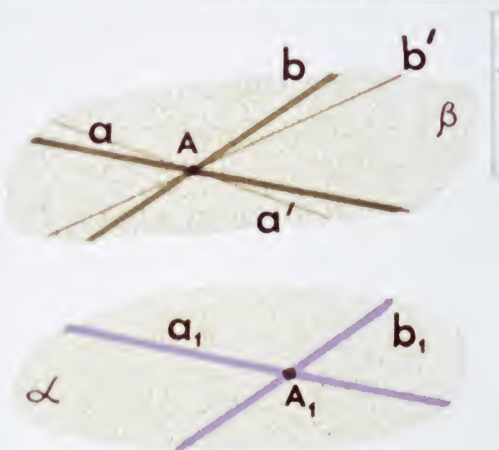


• • •

Доказать: 1) Через A можно провести $\beta \parallel \alpha$

Доказательство утверждения 2 теоремы 15.5.

Дано: Через A проходит $\beta \parallel \alpha$, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$.



Пусть через A проходит $\beta' \parallel \alpha$.

Проведем γ_1 через a и a_1;
γ_2 через b и b_1.

Обозначим через a' пересечение γ_1 и β', через b' — пересечение γ_2 и β'.

$a' \parallel a$, $b' \parallel b$,

a' совпадает с a, b' совпадает с b.

. . .

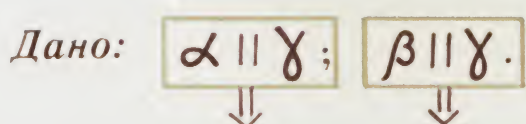
Докажите: β — единственная.

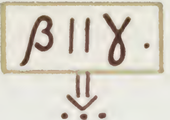
α

β

γ

Задача.

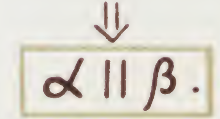
Дано: 



$\Downarrow$ ... $\Downarrow$ ...

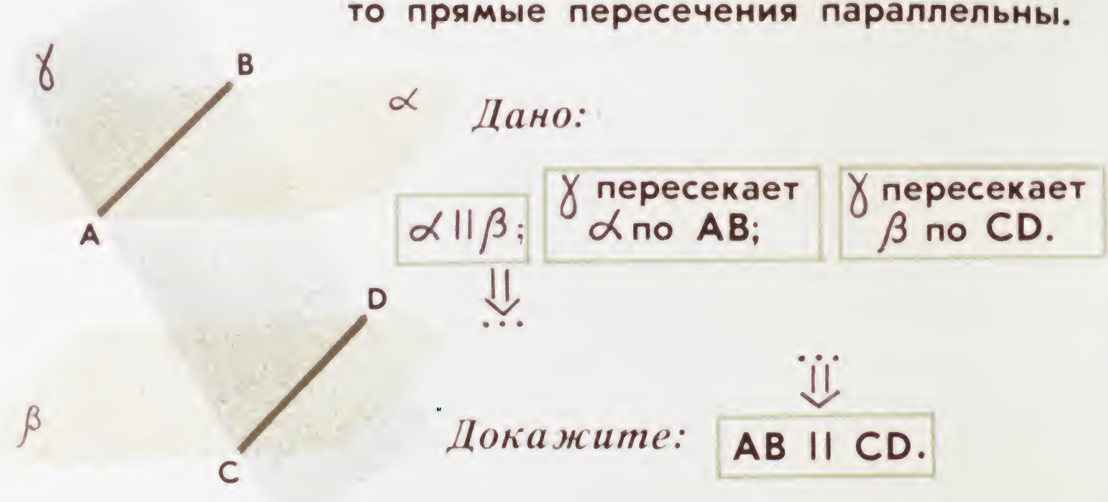
...

$\Downarrow$

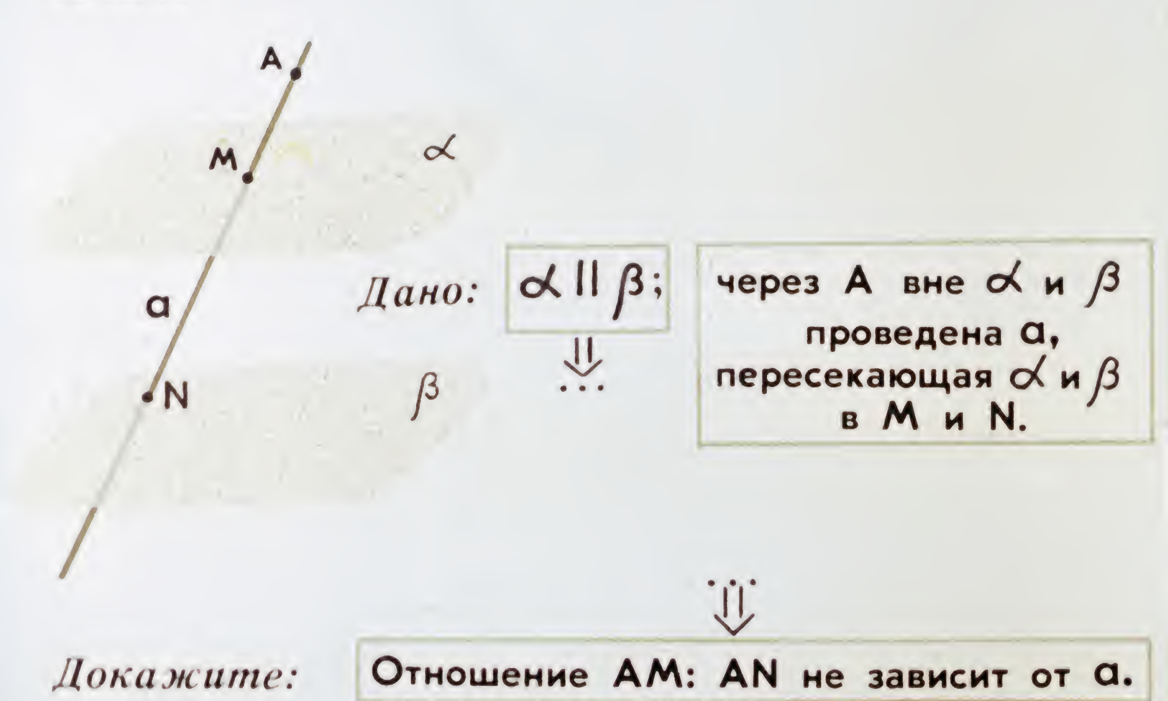
Докажите: 

Укажите, к какому противоречию приводит предположение: «α и β имеют общую точку», и решите задачу.

Теорема 15.6. **Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.**



К какому противоречию приводит предложение: «AB и CD пересекаются»? Выполните доказательство.


Задача.
A
M
α
a
N
β
Дано:
α || β;
через A вне α и β проведена a, пересекающая α и β в M и N.
⇓
...
⇓
Докажите:
Отношение AM: AN не зависит от a.

Решение задачи: *Дано:* $\alpha \parallel \beta$;

через A вне α и β проведена a, пересекающая α и β в M и N.

Через A проведем a_1 и через a и a_1 — плоскость γ; γ пересекает α по MM_1, β — по NN_1.

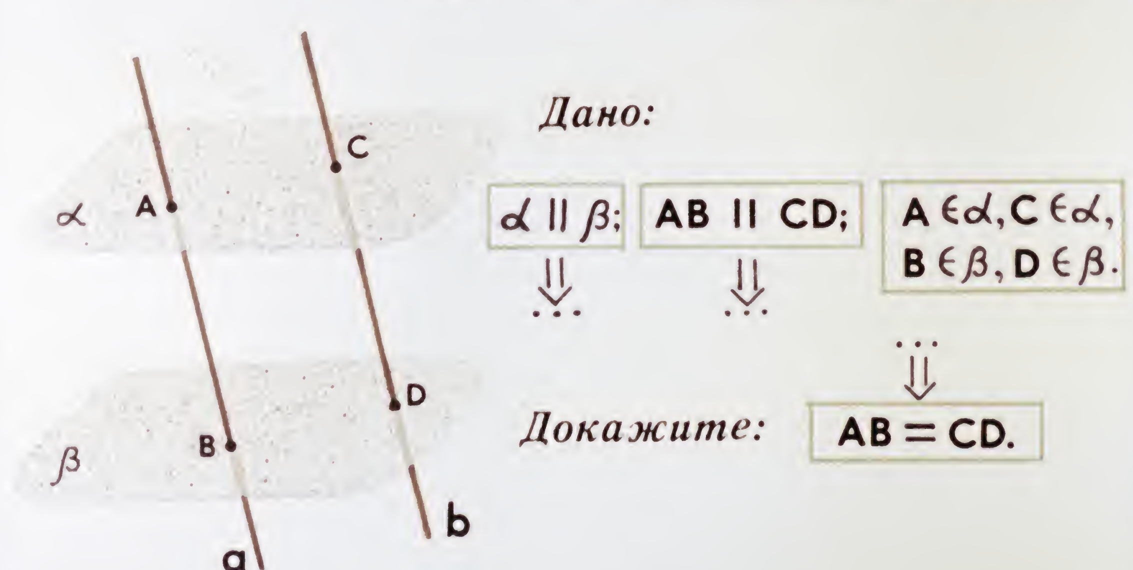
...

$\triangle AMM_1$ и $\triangle ANN_1$ подобны.

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AM_1}{AN_1}.$$

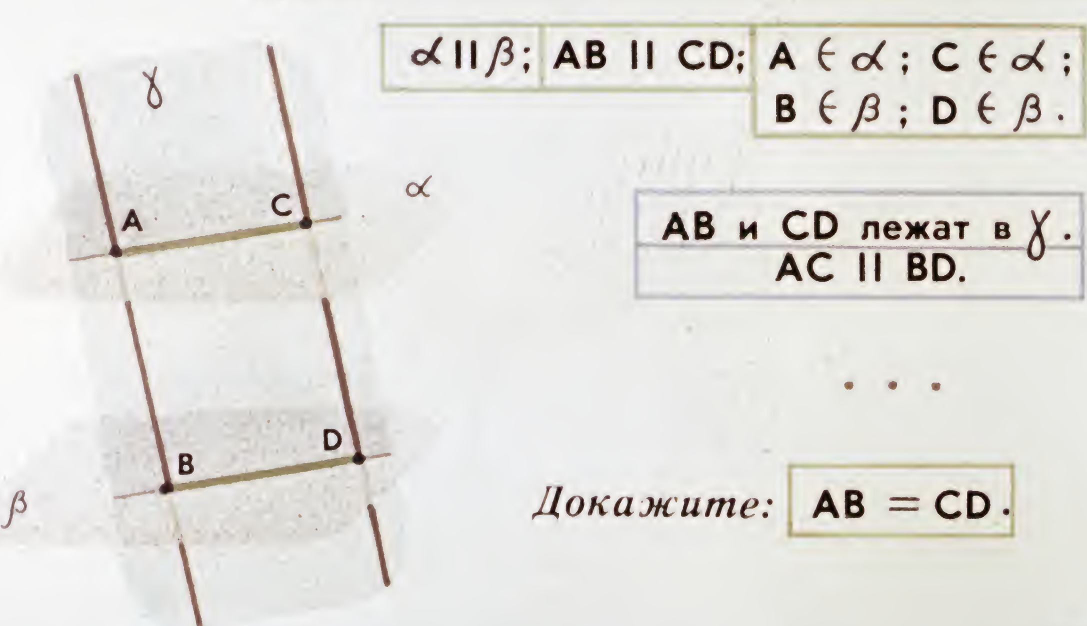
Докажите: Отношение AM:AN не зависит от a.

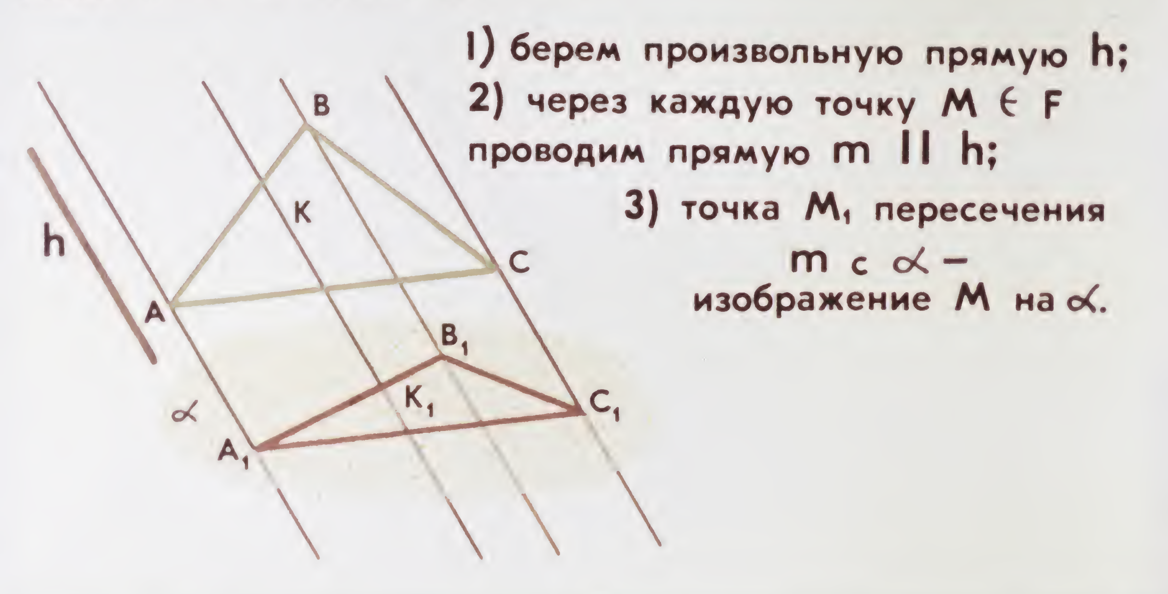
Теорема 15.7. **Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.**



Доказательство теоремы 15.7.

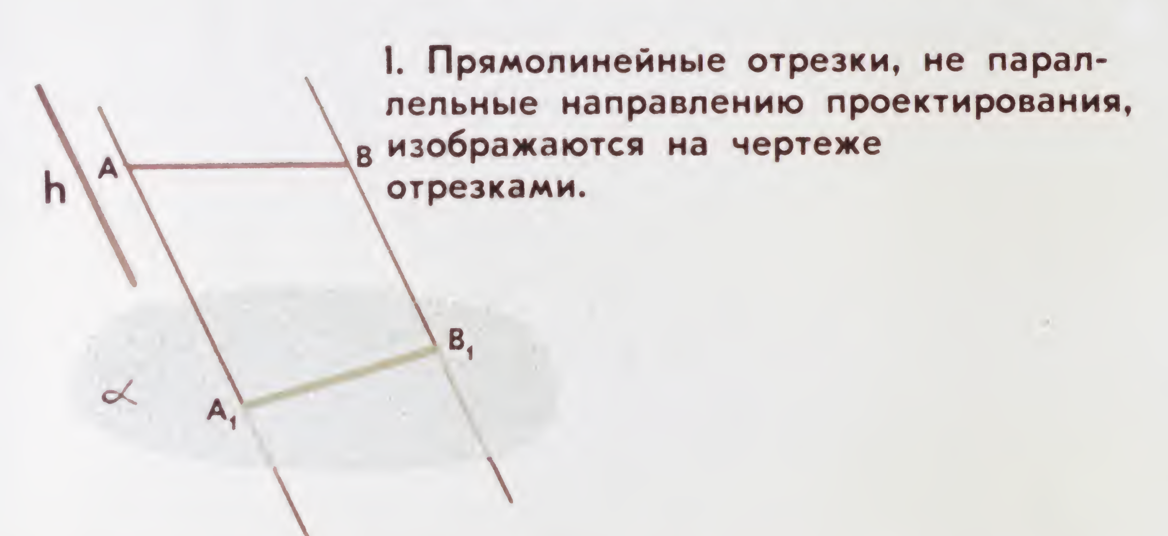
Дано:





Каким образом построить изображение точки K при параллельном проектировании на плоскость α?

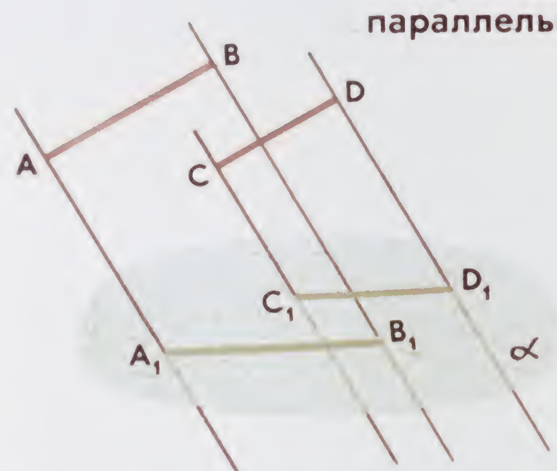
Свойства параллельного проектирования



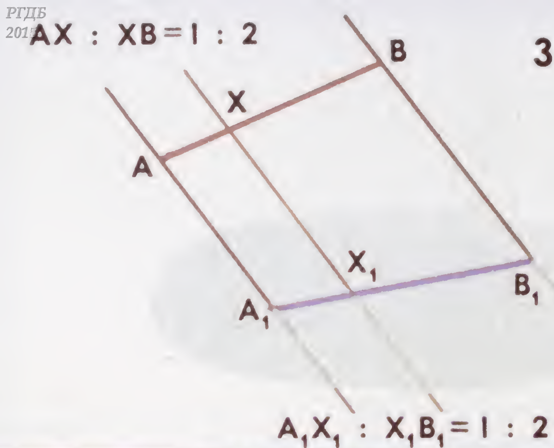
1. Прямолинейные отрезки, не параллельные направлению проектирования, изображаются на чертеже отрезками.

Докажите свойство 1, рассмотрев пересечения прямых, проектирующих точки отрезка AB на плоскость α. Почему все эти прямые лежат в одной плоскости?

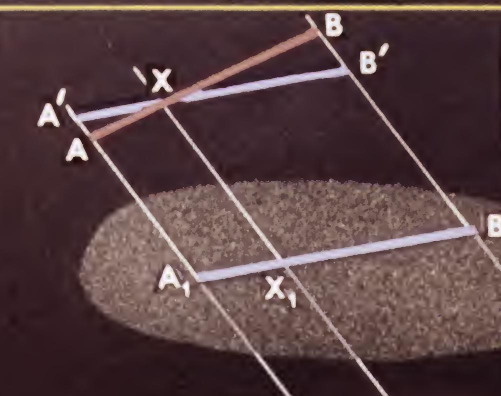
2. Параллельные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа параллельными отрезками.



Докажите свойство 2, рассмотрев линию пересечения плоскостей, заданных прямыми AB и AA_1, CD и CC_1, с плоскостью α.
Какие утверждения вы при этом используете?

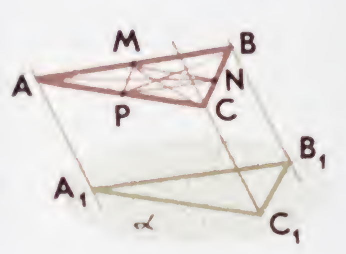


3. Отношение отрезков одной прямой или параллельных отрезков сохраняется при параллельном проектировании.



Докажите свойство 3, рассмотрев треугольники AXA′ и BXB′ (A′B′ || A_1B_1).

Задача.

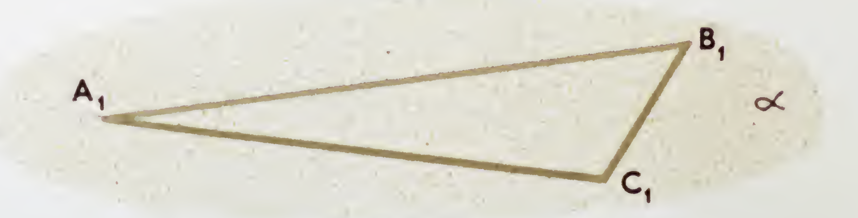


Дано:

△ $A_1B_1C_1$—параллельная проекция треугольника ABC.
Как построить проекцию медиан треугольника ABC?

Докажите,

что проекции средних линий треугольника ABC параллельны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$.



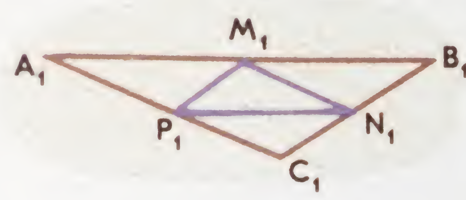
Решение задачи.

Если AN—медиана треугольника ABC, то CN : NB = 1 : 1.

При проектировании

$$\frac{CN}{NB} = \frac{C_1N_1}{N_1B_1} = \frac{1}{1}.$$

Средние линии треугольника ABC параллельны его сторонам и потому проектируются в отрезки, параллельные сторонам треугольника $A_1B_1C_1$:



$M_1N_1 \parallel A_1C_1$;

$M_1P_1 \parallel C_1B_1$;

$P_1N_1 \parallel A_1B_1$.

Сформулируйте свойства параллельного проектирования, которые использовались при решении задачи.

К сведению учителя

Диафильм предназначен для объяснения темы «Параллельность прямых и плоскостей» по учебнику А. В. Погорелова. Он содержит весь теоретический материал, в том числе задачи, решение которых рассмотрено в тексте параграфа. Рекомендуем демонстрировать на уроке лишь тот фрагмент диафильма, который относится к изучаемому материалу.

Знак ⇓ (с многоточием) означает, что надо перечислить известные ученикам выводы из условия или части условия. Например (кадр 3), из параллельности прямых a и b следуют выводы: 1) a и b лежат в одной плоскости; 2) a и b не пересекаются.

Знак ⇓ означает, что требуется вспомнить те аксиомы, определения, теоремы, из которых следует истинность заключения или его фрагмента.

Многоточие в кадрах с доказательствами теорем (решениями задач) означает требование закончить доказательство.

Желательно обсуждать, на основании чего сделан каждый из выводов, и прослеживать весь ход доказательства от условия до заключения.

КОНЕЦ

Диафильм создан по программе, утвержденной
Министерством просвещения СССР

Автор Б. МАРКОВ

Художник-оформитель Н. ДУНАЕВА

Редактор В. ЧЕРНИНА

103062, Москва, Старосадский пер., 7

Цветной 0-30

Д-073-85